



教育图书



功能学具



学生之家

基础教育行业专研品牌

30⁺年专注教育行业

全品学练考

主编 肖德好

导学案

高中数学

选择性必修第一册 BS

数智教辅

索取二维码
贴此处
激活享受服务

AI时代就该用AI学习
遇到问题快扫我

天津出版传媒集团
天津人民出版社

目录 Contents

01 第一章 直线与圆

PART ONE

§ 1 直线与直线的方程	导 195
1.1 一次函数的图象与直线的方程	导 195
1.2 直线的倾斜角、斜率及其关系	导 195
第 1 课时 直线的倾斜角和斜率	导 195
第 2 课时 直线的斜率与倾斜角、方向向量的关系	导 197
1.3 直线的方程	导 199
第 1 课时 直线方程的点斜式	导 199
第 2 课时 直线方程的两点式	导 201
第 3 课时 直线方程的一般式	导 203
1.4 两条直线的平行与垂直	导 205
第 1 课时 两条直线平行	导 205
第 2 课时 两条直线垂直	导 207
1.5 两条直线的交点坐标	导 209
1.6 平面直角坐标系中的距离公式	导 211
第 1 课时 两点间的距离公式	导 211
第 2 课时 点到直线的距离公式和两条平行直线间的距离公式	导 212
§ 2 圆与圆的方程	导 215
2.1 圆的标准方程	导 215
第 1 课时 圆的标准方程	导 215
第 2 课时 圆的标准方程的综合应用	导 217
2.2 圆的一般方程	导 218
2.3 直线与圆的位置关系	导 220
2.4 圆与圆的位置关系	导 222
▶ 本章总结提升	导 224

02 第二章 圆锥曲线

PART TWO

§ 1 椭圆	导 227
1.1 椭圆及其标准方程	导 227

1.2 椭圆的简单几何性质	导 229
第 1 课时 椭圆的简单几何性质	导 229
第 2 课时 椭圆的几何性质的综合问题	导 232
§ 2 双曲线	导 234
2.1 双曲线及其标准方程	导 234
2.2 双曲线的简单几何性质	导 236
第 1 课时 双曲线的简单几何性质	导 236
第 2 课时 双曲线的几何性质的综合问题	导 239
§ 3 抛物线	导 241
3.1 抛物线及其标准方程	导 241
3.2 抛物线的简单几何性质	导 242
第 1 课时 抛物线的简单几何性质(一)	导 242
第 2 课时 抛物线的简单几何性质(二)	导 244
§ 4 直线与圆锥曲线的位置关系	导 246
4.1 直线与圆锥曲线的交点	导 246
4.2 直线与圆锥曲线的综合问题	导 249
▶ 本章总结提升	导 251

03 第三章 空间向量与立体几何

PART THREE

§ 1 空间直角坐标系	导 255
1.1 点在空间直角坐标系中的坐标	导 255
1.2 空间两点间的距离公式	导 255
§ 2 空间向量与向量运算	导 257
2.1 从平面向量到空间向量	导 257
2.2 空间向量的运算	导 257
第 1 课时 空间向量的概念及运算	导 257
第 2 课时 空间向量的数量积	导 260
§ 3 空间向量基本定理及空间向量运算的坐标表示	导 263
3.1 空间向量基本定理	导 263

3.2 空间向量运算的坐标表示及应用 导 265

第 1 课时 空间向量运算的坐标表示及平行(共线)和垂直的条件 导 265

第 2 课时 空间向量长度与夹角的坐标表示 导 267

§ 4 向量在立体几何中的应用 导 269

4.1 直线的方向向量与平面的法向量 导 269

4.2 用向量方法研究立体几何中的位置关系 导 271

第 1 课时 用向量方法研究立体几何中的平行关系 导 271

第 2 课时 用向量方法研究立体几何中的垂直关系 导 274

4.3 用向量方法研究立体几何中的度量关系 导 277

第 1 课时 用向量方法研究立体几何中的度量关系(一) 导 277

第 2 课时 用向量方法研究立体几何中的度量关系(二) 导 279

第 3 课时 空间中的距离问题 导 281

◆ 本章总结提升 导 283

05 第五章 计数原理

PART FIVE

§ 1 基本计数原理 导 289

1.1 分类加法计数原理 导 289

1.2 分步乘法计数原理 导 289

1.3 基本计数原理的简单应用 导 291

§ 2 排列问题 导 292

2.1 排列与排列数 导 292

2.2 排列数公式 导 294

第 1 课时 排列数公式 导 294

第 2 课时 排列的综合问题 导 295

§ 3 组合问题 导 297

3.1 组合 导 297

3.2 组合数及其性质 导 297

第 1 课时 组合与组合数 导 297

第 2 课时 组合数的性质 导 298

第 3 课时 排列、组合的综合应用 导 299

§ 4 二项式定理 导 301

4.1 二项式定理的推导 导 301

4.2 二项式系数的性质 导 303

◆ 本章总结提升 导 305

06 第六章 概率

PART SIX

§ 1 随机事件的条件概率 导 307

1.1 条件概率的概念 导 307

1.2 乘法公式与事件的独立性 导 308

1.3 全概率公式 导 309

§ 2 离散型随机变量及其分布列 导 311

2.1 随机变量 导 311

2.2 离散型随机变量的分布列 导 313

§ 3 离散型随机变量的均值与方差 导 315

3.1 离散型随机变量的均值 导 315

3.2 离散型随机变量的方差 导 317

§ 4 二项分布与超几何分布 导 319

4.1 二项分布 导 319

第 1 课时 二项分布 导 319

第 2 课时 二项分布的综合应用 导 321

4.2 超几何分布 导 323

§ 5 正态分布 导 326

◆ 本章总结提升 导 329

07 第七章 统计案例

PART SEVEN

§ 1 一元线性回归 导 332

1.1 直线拟合 导 332

1.2 一元线性回归方程 导 332

§ 2 成对数据的线性相关性 导 334

2.1 相关系数 导 334

2.2 成对数据的线性相关性分析 导 334

§ 3 独立性检验问题 导 337

3.1 独立性检验 导 337

3.2 独立性检验的基本思想 导 337

3.3 独立性检验的应用 导 337

◆ 本章总结提升 导 340

◆ 参考答案

导 343

§ 1 直线与直线的方程

1.1 一次函数的图象与直线的方程

1.2 直线的倾斜角、斜率及其关系

第 1 课时 直线的倾斜角和斜率

【学习目标】

1. 理解直线的倾斜角和斜率的概念.
2. 经历用代数方法刻画直线斜率的过程,掌握过两点的直线斜率的计算公式.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 一次函数的图象与直线的方程

一般地,一次函数 $y=kx+b(k \neq 0)$ 的图象是一条直线,它是以满足 $y=kx+b$ 的每一对 x, y 的值为坐标的点构成的.同时函数解析式 $y=kx+b$ 可以看作二元一次方程.

◆ 知识点二 直线的倾斜角

1. 定义:在平面直角坐标系中,对于一条与 x 轴相交的直线 l ,把 x 轴(正方向)按逆时针方向绕着交点旋转到和直线 l 首次重合时所成的角,称为直线 l 的倾斜角.

2. 通常倾斜角用 α 表示.当 _____ 时,规定它的倾斜角为 0° .

3. 倾斜角 α 的取值范围: _____.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1) 所有直线都有倾斜角. ()
- (2) 平行于 x 轴的直线的倾斜角是 0° 或 180° . ()
- (3) 一个倾斜角 α 不能确定一条直线. ()

◆ 知识点三 直线的斜率

经过两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2) (x_1 \neq x_2)$ 的直线的斜率公式是 _____.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1) 任何一条直线有且只有一个斜率和它对应. ()
- (2) 直线的倾斜角是锐角时,直线的斜率为正;直线的倾斜角是钝角时,直线的斜率为负. ()
- (3) 经过两点的直线的斜率公式适用于任何直线. ()

课 中 探 究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 一次函数的图象与直线的方程

例 1 已知一次函数 $y=x+b$ 的图象经过点 $A(2,0)$,则 b 的值为 _____.

变式 (多选题)函数 $y=x-2$ 的图象经过的象限有 ()

- A. 第一象限
- B. 第二象限
- C. 第三象限
- D. 第四象限

[素养小结]

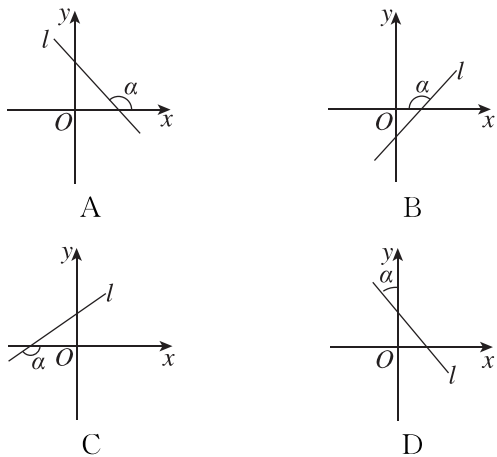
一元一次方程与一次函数的关系

(1) 对于一次函数 $y=kx+b(k \neq 0)$,由它的函数值 $y=0$ 就得到关于 x 的一元一次方程 $kx+b=0$,解这个方程可得 $x=-\frac{b}{k}$,于是一次函数 $y=kx+b$ 的图象与 x 轴的交点坐标为 $(-\frac{b}{k}, 0)$.

(2)若已知一次函数 $y=kx+b(k \neq 0)$ 的图象与 x 轴的交点坐标为 $(-\frac{b}{k}, 0)$, 则一元一次方程 $kx+b=0$ 的根为 $-\frac{b}{k}$.

◆ 探究点二 直线的倾斜角

例 2 [2024·内蒙古呼伦贝尔高二期中] 下列图中 α 能表示直线 l 的倾斜角的是 ()



变式 1 若直线 l 过点 $A(1, 1)$, 且不过第四象限, 则直线 l 的倾斜角 α 的取值范围是 ()

- A. $[0, \pi)$ B. $[0, \frac{\pi}{4}]$
 C. $[0, \frac{\pi}{2}]$ D. $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

变式 2 (多选题) 若直线 l 与 x 轴交于点 A , 其倾斜角为 α , 直线 l 绕点 A 按顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{4}$ 后得到直线 l_1 , 则直线 l_1 的倾斜角可能为 ()

- A. $\alpha + \frac{\pi}{4}$ B. $\alpha + \frac{3\pi}{4}$
 C. $\alpha - \frac{\pi}{4}$ D. $\frac{3\pi}{4} - \alpha$

[素养小结]

求直线的倾斜角的方法及两点注意

- (1)方法: 结合图形, 利用特殊三角形(如直角三角形)求角.
 (2)两点注意: ①当直线与 x 轴平行或重合时, 倾斜角为 0° , 当直线与 x 轴垂直时, 倾斜角为 90° .
 ②直线倾斜角的取值范围是 $[0^\circ, 180^\circ)$.

◆ 探究点三 直线的斜率

例 3 (1)已知直线上两点, 求直线的斜率, 并判断其倾斜角是锐角还是钝角:

- ① $A(3, 5), B(-1, -2)$;
 ② $C(-3, 5), D(3, -1)$.

(2)判断下列三点是否在同一条直线上:

- ① $A(-3, 1), B(2, -4), C(3, 0)$;
 ② $D(5, -1), E(-1, 2), F(-5, 4)$.

变式 设点 $A(m, -m+3), B(2, m-1), C(-1, 4)$, 若直线 AC 的斜率等于直线 BC 的斜率的 3 倍, 则实数 m 的值为_____.

[素养小结]

利用斜率公式求直线的斜率应注意的事项

- (1)斜率 k 与两点 P_1, P_2 在直线上的位置无关, 即 y_1, y_2 和 x_1, x_2 在公式中的前后顺序可以同时交换, 但分子与分母不能交换;
 (2)当 $x_1=x_2$ 时, 公式右边无意义, 直线与 x 轴垂直, 直线的倾斜角 $\alpha=90^\circ$, 斜率不存在;
 (3)当 $y_1=y_2$ 时, 直线与 x 轴平行或重合, 直线的倾斜角 $\alpha=0^\circ$, 斜率 $k=0$.

拓展 已知 $A(1, 0), B(2, a), C(a, 1)$ 可以构成三角形, 则实数 a 的取值集合为_____.

(2) 经过点 $P(0, -1)$ 作直线 l , 若直线 l 与连接 $A(1, -2), B(2, 1)$ 两点的线段总有公共点, 则直线 l 的倾斜角 α 的取值范围是 ()

- A. $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$
 B. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$
 C. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$
 D. $\left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$

[素养小结]

1. 由倾斜角大小(或范围)求斜率大小(或范围)利用公式 $k = \tan \alpha (\alpha \neq 90^\circ)$ 求解.

2. 由两点坐标求直线斜率运用斜率公式 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ($x_1 \neq x_2$) 求解.

3. 涉及直线与线段有交点问题常利用数形结合及公式求解.

拓展 [2024·广东佛山高二期中] 直线 $y = 2 - x \tan 36^\circ$ 的倾斜角为 ()

- A. 36° B. 72°
 C. 108° D. 144°

◆ 探究点二 直线的斜率与方向向量的关系

例 2 (1) 已知直线 l 经过两点 $A(-1, 2), B(3, 4)$, 则直线 l 的一个方向向量的坐标是 ()

- A. $(2, -4)$ B. $(1, 2)$
 C. $(-4, -2)$ D. $(4, -2)$

(2) (多选题) 直线 $y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ 的一个方向向量的坐标是 ()

- A. $(2, 3)$ B. $\left(1, -\frac{2}{3}\right)$
 C. $(-3, -2)$ D. $(-3, 2)$

变式 (1) 过 $A(4, y), B(2, -3)$ 两点的直线的的一个方向向量为 $n = (-1, -1)$, 则 $y =$ ()

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 C. -1 D. 1

(2) 直线 $l: y = kx$ 过点 $A(2, 2)$, 则直线 l 的一个方向向量的坐标为 _____.

[素养小结]

一般地, 如果已知 $a = (u, v)$ 是直线 l 的一个方向向量, 那么:

(1) 当 $u = 0$ 时, 显然直线 l 的斜率不存在, 倾斜角为 90° .

(2) 当 $u \neq 0$ 时, 直线 l 的斜率 k 存在, 且向量 $(1, k)$ 是直线 l 的一个方向向量.

(3) 对于非零实数 λ , 向量 λa 都是 l 的方向向量, 而且直线 l 的任意两个方向向量一定共线.

◆ 探究点三 直线的倾斜角与方向向量的关系

例 3 (1) 若直线 l 的一个方向向量是 $e = (-1, \sqrt{3})$, 则直线 l 的倾斜角是 ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$
 C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

(2) 若直线 l 的倾斜角等于 135° , 则下列向量中不是直线 l 的方向向量的是 ()

- A. $(2, 2)$ B. $(-3, 3)$
 C. $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ D. $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

变式 若直线 l 的一个方向向量为 $a = \left(\sin \frac{\pi}{7}, \cos \frac{\pi}{7}\right)$, 则直线 l 的倾斜角 $\theta =$ _____.

[素养小结]

在运用直线的倾斜角与方向向量的关系时, 常常由倾斜角求出斜率, 再利用斜率与方向向量的关系来求解.

1.3 直线的方程

第1课时 直线方程的点斜式

【学习目标】

1. 根据确定直线位置的几何要素,探索并掌握直线方程的点斜式.
2. 根据确定直线位置的几何要素,探索并掌握直线方程的斜截式.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 直线方程的点斜式

直线 l 经过点 $P(x_0, y_0)$, 且斜率为 k , 设 $Q(x, y)$ 是直线 l 上不同于点 P 的任意一点, 因为点 P, Q 都在直线 l 上, 所以可以用 P, Q 两点的坐标表示

直线 l 的斜率: $\frac{y-y_0}{x-x_0}=k$, 即 _____ . ①

(1) 方程①就是经过点 $P(x_0, y_0)$ 且斜率为 k 的直线 l 的方程. 方程①称为直线方程的点斜式.

(2) 方程①适用的条件: 直线的斜率存在.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1) 直线 $y-3=k(x+1)$ 恒过定点 $(-1, 3)$. ()

(2) 经过点 $P_0(x_0, y_0)$ 的所有直线都能用直线方程的点斜式来表示. ()

(3) 方程 $k=\frac{y-y_0}{x-x_0}$ 与 $y-y_0=k(x-x_0)$ 表示的意义相同. ()

◆ 知识点二 直线方程的斜截式

1. 若直线 l 与 y 轴的交点为 $(0, b)$, 则称 _____ 为直线 l 在 y 轴上的截距.

2. 直线方程的斜截式: 若直线 l 经过点 $(0, b)$ 且斜率为 k , 则该直线方程的点斜式为 $y-b=k(x-0)$, 即 _____, 该方程中的 k 为直线 l 的斜率, b 为直线 l 在 y 轴上的截距. 称 $y=kx+b$ 为直线方程的斜截式.

若直线 l 经过点 $P(x_0, y_0)$, 且与 x 轴垂直, 则直线 l 的斜率 k 不存在, 此时它的特点是: 直线 l 上任意一点的横坐标都是 x_0 , 所以直线 l 的方程为 $x=x_0$.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1) 直线 l 在 y 轴上的截距是直线 l 与 y 轴的交点到原点的距离. ()

(2) 直线 $x=a$ 与 x 轴交点的横坐标为 a , 在 y 轴上的截距为 0. ()

(3) 所有的直线都能用直线方程的斜截式来表示. ()

课 中 探 究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 直线方程的点斜式

例 1 (1) 已知直线 l 的倾斜角是 135° , 且过点 $(1, 0)$, 则下列四个点中在直线 l 上的是 ()

A. $(0, -1)$ B. $(-1, 2)$

C. $(0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ D. $(2, 1)$

(2) 求经过点 $P_0(-2, 3)$, 且满足下列条件的直线的方程, 并画出直线.

① 倾斜角 $\alpha=45^\circ$; ② 与 x 轴垂直; ③ 与 x 轴平行.

变式 已知直线 l 过点 $P(\sqrt{3}, -1)$, 且直线 l 的倾斜角是直线 $y=\sqrt{3}x$ 的倾斜角的 2 倍, 则直线 l 的方程是 _____.

[素养小结]

1. 求直线方程的点斜式的步骤: 定点 $P(x_0, y_0) \rightarrow$ 定斜率 $k(k$ 存在) \rightarrow 写出方程 $y-y_0=k(x-x_0)$.

2. 方程 $y-y_0=k(x-x_0)$ 可表示过点 $P(x_0, y_0)$ 的所有直线, 但直线 $x=x_0$ 除外.

拓展 直线 $y=ax-3a+2(a \in \mathbf{R})$ 必过定点 _____.

◆ 探究点二 直线方程的斜截式

例 2 求满足下列条件的直线的方程.

(1) 倾斜角为 45° , 且在 y 轴上的截距为 2;

(2) 倾斜角是直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 的倾斜角的 2 倍, 与 y 轴的交点到坐标原点的距离为 3.

例 3 已知直线的斜率是 -1 , 写出在 y 轴上的截距分别为 $-2, 0, 2$ 的直线的方程, 并在同一平面直角坐标系中画出这些直线. 通过观察, 指出方程 $y = -x + b$ 所表示的直线具有的与 b 取值无关的特征.

变式 已知直线 l 的斜率为 $\frac{1}{6}$, 且和两坐标轴围成面积为 3 的三角形, 求直线 l 的方程.

[素养小结]

对直线方程的斜截式的透析

(1) 斜截式是点斜式的一个特例, 只要点斜式中的点在 y 轴上, 就可以直接用斜截式表示.

(2) 直线方程的斜截式与一次函数的关系: 当 $k \neq 0$ 时, 直线方程的斜截式 $y = kx + b$ 是一次函数的形式; 而在一次函数 $y = kx + b$ 中, k 是直线的斜率, 常数 b 是直线在 y 轴上的截距.

拓展 [2024·南京高二期中] 已知将直线 l 向左平移 3 个单位长度, 再向下平移 2 个单位长度后, 所得直线与原直线重合, 则直线 l 的斜率为 ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $-\frac{2}{3}$

◆ 探究点三 点斜式、斜截式的应用

例 4 在平面直角坐标系 xOy 中, $A(1, 3)$, $B(4, 2)$, 若直线 $y = ax - 2a$ 与线段 AB 有公共点, 求实数 a 的取值范围.

变式 已知直线 l 过点 $(4, -3)$, 且直线 l 在 y 轴上的截距和直线 l 与 x 轴交点的横坐标相等, 则直线 l 的方程为 ()

- A. $y = -x + 1$
B. $y = -\frac{3}{4}x$
C. $y = -x + 1$ 或 $y = -\frac{3}{4}x$
D. 以上均不正确

[素养小结]

当给出了直线方程的点斜式或斜截式时, 可以先由直线的方程准确地找出直线的斜率与截距, 再结合图形来解决问题.

拓展 直线 $l_1: y = 2x$ 和 $l_2: y = kx + 1$ 与 x 轴围成的三角形是等腰三角形, 则满足条件的 k 的取值集合为 _____.

第2课时 直线方程的两点式

【学习目标】

1. 根据确定直线位置的几何要素,探索并掌握直线方程的两点式.
2. 根据确定直线位置的几何要素,探索并掌握直线方程的截距式.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 直线方程的两点式

已知直线 l 上的两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ (其中 $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$), 点 $Q(x, y)$ 为直线 l 上其他的任意一点. 对于倾斜角不为 $\frac{\pi}{2}$ 的直线, 由直线上任意两点算出的斜率是一个恒定的常数, 因此

$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, 即 _____, 这个方程

称为直线方程的两点式.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1) 已知直线过两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$, 则直线方程的两点式一定存在. ()

(2) 能用两点式表示的直线也可用点斜式表示. ()

◆ 知识点二 直线方程的截距式

若直线 l 与 x 轴的交点为 $A(a, 0)$, 与 y 轴的交点为 $B(0, b)$, 其中 $a \neq 0, b \neq 0$, 则由两点式可得直线

l 的方程为 $\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a}$, 整理得 _____. 通常,

称方程 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (其中 $ab \neq 0$) 为直线方程的截距式. 其中, a 为直线与 x 轴交点的横坐标(即直线在 x 轴上的截距), b 为直线与 y 轴交点的纵坐标(即直线在 y 轴上的截距).

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1) 不经过原点的直线都可以用方程 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 表示. ()

(2) 能用截距式表示的直线都能用两点式表示. ()

课 中 探 究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 直线方程的两点式

例1 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点分别为 $A(-3, 2), B(5, -4), C(0, -2)$.

- (1) 求 BC 边所在直线的方程;
- (2) 求 BC 边上的中线所在直线的方程.

变式 已知直线 l 经过 $(-2, -2), (2, 4)$ 两点, 点 $(1348, m)$ 在直线 l 上, 则 m 的值为 ()

- A. 2021 B. 2022
C. 2023 D. 2024

[素养小结]

1. 由两点式求直线方程的步骤

- (1) 设出直线所经过点的坐标.
- (2) 根据题中的条件, 找到有关方程, 解出点的坐标.
- (3) 由直线方程的两点式写出直线方程.

2. 当已知两点坐标, 求过这两点的直线方程时, 首先要判断是否满足两点式的适用条件: 两点的连线不平行于坐标轴. 若满足, 则考虑用两点式求方程.

◆ 探究点二 直线方程的截距式

例 2 求经过点 $A(3,4)$ 且在两坐标轴上的截距的绝对值相等的直线方程.

变式 (1) 已知过点 $P(3,1)$ 的直线 l 在 x 轴上的截距是其在 y 轴上截距的 3 倍, 则满足条件的直线 l 的方程为_____.

(2) (多选题) 若直线 $ax+y+3-a=0$ 在 x 轴和 y 轴上的截距相等, 则实数 a 的值可以为 ()

- A. -1 B. 1
C. -3 D. 3

[素养小结]

用直线方程的截距式解决问题的优点及注意事项

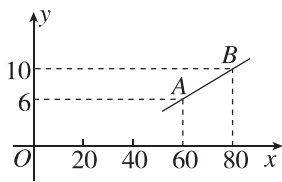
(1) 优点: ①由截距式可直接确定直线与 x 轴和 y 轴的交点的坐标, 因此根据截距式画直线比较方便.

②在解决与截距有关或直线与坐标轴围成的三角形面积、周长等问题时, 使用截距式更简便.

(2) 注意事项: 当直线与坐标轴平行时, 有一个截距不存在; 当直线通过原点时, 两个截距均为零. 在这两种情况下都不能用截距式, 故解决问题时要注意分类讨论.

◆ 探究点三 两点式、截距式的应用

例 3 (1) 某地汽车客运公司规定旅客可随身携带一定重量的行李, 若超过规定, 则需要购买行李票, 行李票费用 y (元) 与行李重量 x (kg) 的关系如图所示, 则旅客最多可免费携带行李的重量为 ()



- A. 20 kg B. 25 kg
C. 30 kg D. 80 kg

(2) 已知直线 l 过点 $P(-2,1)$, 直线 l 分别与 x 轴的正半轴、 y 轴的正半轴交于点 A, B , O 为原点.

若 $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{1}{2}$, 求直线 l 的方程.

变式 入射光线从点 $P(2,1)$ 出发, 经 x 轴反射后, 通过点 $Q(4,3)$, 则入射光线所在直线的方程为_____.

[素养小结]

(1) 若已知两点坐标, 则一般选用直线方程的两点式, 若已知两点是直线与坐标轴的交点, 则用直线方程的截距式. (2) 不论选用哪种形式的直线方程, 都要注意所选形式的方程的限制条件, 对特殊情况下的直线要单独讨论解决.

第3课时 直线方程的一般式

【学习目标】

1. 根据确定直线位置的几何要素,探索并掌握直线方程的一般式.
2. 会进行直线方程的五种形式之间的转化.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 直线方程的一般式

关于 x, y 的二元一次方程 _____ (其中 A, B 不全为 0) 表示的是一条直线, 称它为直线方程的 _____.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1) 直线方程的一般式都可以化为截距式. ()
- (2) 直线方程的一般式都可以化为斜截式. ()
- (3) 平面直角坐标系中的任何一条直线都可以用直线方程的一般式表示. ()

◆ 知识点二 直线方程的点法式

若直线 l 过点 $P_0(x_0, y_0)$, 且它的一个法向量为 $n=(A, B)$, 则直线 l 的方程为 _____, 称这个方程为直线方程的点法式.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1) 任何直线的方程都可以化为点法式. ()
- (2) 直线 $Ax+By+C=0$ 的一个法向量的坐标为 $(B, -A)$. ()
- (3) 直线 $Ax+By+C=0$ 的一个方向向量的坐标为 $(B, -A)$. ()

课 中 探 究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 直线方程的一般式

例 1 根据下列条件分别写出直线的方程, 并化为一般式.

- (1) 斜率是 $\sqrt{3}$, 且经过点 $A(5, 3)$;
- (2) 经过 $A(-1, 5), B(2, -1)$ 两点;
- (3) 在 x 轴、 y 轴上的截距分别为 $-3, -1$;
- (4) 经过点 $B(4, 2)$, 且平行于 x 轴.

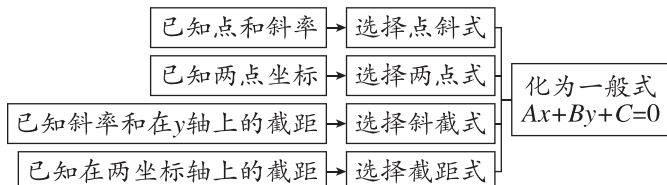
变式 1 若方程 $(m^2-4)x+(m^2-2m)y+1=0$ 表示一条直线, 则实数 m 满足 ()

- $m \neq 0$
- $m \neq 2$
- $m \neq \pm 2$
- $m \neq \pm 2$ 且 $m \neq 0$

变式 2 求直线 $x-2y+2=0$ 绕点 $(-2, 0)$ 按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{4}$ 后所得到的直线的方程.

[素养小结]

1. 求直线方程的一般式的方法



2. 由直线方程的一般式转化为四种特殊形式时, 一定要注意转化的前提条件.

◆ 探究点二 直线方程一般式的应用

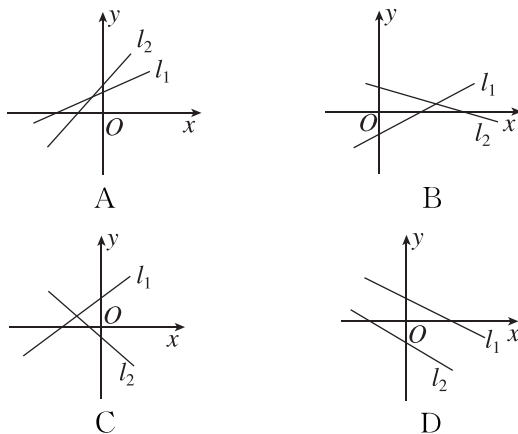
例 2 设直线 l 的方程为 $(m^2 - 2m - 3)x - (2m^2 + m - 1)y + 6 - 2m = 0$.

- (1) 若直线 l 在 x 轴上的截距为 -3 , 求 m 的值;
 (2) 若直线 l 的斜率为 1 , 求 m 的值.

变式 (1) [2024 · 北京 101 中学高二月考] 由曲线 $2|x| + |y| = 2$ 围成的图形的面积为 ()

- A. 2 B. 4
 C. 5 D. 8

(2) 在同一平面直角坐标系中, 直线 $l_1: ax - y + b = 0, l_2: bx + y - a = 0 (ab \neq 0)$ 的位置可能是 ()



[素养小结]

- (1) 若方程 $Ax + By + C = 0$ 表示直线, 则需满足 A, B 不同时为 0 .
 (2) 在直线方程 $Ax + By + C = 0$ 中, 令 $x = 0$ 可得直线在 y 轴上的截距, 令 $y = 0$ 可得直线在 x 轴上的截距. 若确定直线斜率存在, 则可将一般式化为斜截式.
 (3) 解分式方程注意验根.

拓展 已知直线 l 的方程为 $(a + 1)x + y + 2 - a = 0$.

- (1) 若 l 在两坐标轴上的截距相等, 求 a 的值;
 (2) 若 l 不经过第二象限, 求实数 a 的取值范围.

◆ 探究点三 直线方程的点法式

例 3 (1) 直线 l 过点 $A(3, -1)$, 且 l 的一个法向量为 $n = (3, 2)$, 则直线 l 的方程的点法式为 _____.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, $A(3, 2), B(1, 1), C(2, 3)$, 则 AB 边上的高所在直线的方程是 ()

- A. $2x + y - 7 = 0$ B. $2x - y - 1 = 0$
 C. $x + 2y - 8 = 0$ D. $x - 2y + 4 = 0$

变式 过点 $P(-1, 2)$, 且与直线 $\frac{x-2}{7} = \frac{y+2}{5}$ 垂直的直线的方程的点法式为 _____.

[素养小结]

在求直线方程的点法式时, 一定要区别直线的法向量与方向向量, 结合向量的知识准确找出直线的一个法向量, 再由点法式, 写出直线的方程.

◆ 探究点四 直线过定点问题

例 4 (1) 无论 k 为何值, 直线 $(k+2)x + (1-k)y - 4k - 5 = 0$ 都过一个定点, 则该定点的坐标为 ()

- A. $(1, 3)$ B. $(-1, 3)$
 C. $(3, 1)$ D. $(3, -1)$

(2) 已知实数 a, b 满足 $a + 2b = 1$, 则直线 $ax + 3y + b = 0$ 过定点 ()

- A. $(\frac{1}{6}, \frac{1}{2})$ B. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{6})$
 C. $(\frac{1}{6}, -\frac{1}{2})$ D. $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{6})$

变式 已知 $A(-2,4), B(4,2)$, 直线 $l: ax - y - 2 = 0$ 与线段 AB 恒相交, 求实数 a 的取值范围.

[素养小结]

- (1) 题目给出已知直线方程含参, 则直线一般过定点;
 (2) 直线过定点, 当斜率存在时, 将直线方程化为点斜式, 可得直线过定点 P , 当斜率不存在时, 根据直线方程也可得直线过定点 P , 从而可得答案.

1.4 两条直线的平行与垂直

第1课时 两条直线平行

【学习目标】

1. 理解两条直线平行的条件.
2. 能根据斜率与法向量判定两条直线平行.
3. 能应用两条直线平行解决相关问题.

课前预习

知识导学 素养初识

◆ 知识点 两条直线相交、平行、重合

已知直线 $l_1: y = k_1x + b_1, l_2: y = k_2x + b_2$, 则

l_1 与 l_2 相交 \Leftrightarrow _____;

l_1 与 l_2 平行 \Leftrightarrow _____;

l_1 与 l_2 重合 \Leftrightarrow _____.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1) 如果两条直线平行, 那么这两条直线的斜率一定相等. ()
- (2) 如果两条直线平行, 那么这两条直线的法向量一定相等. ()
- (3) 如果两条直线平行, 那么这两条直线的倾斜角一定相等. ()
- (4) 如果两条直线平行, 那么这两条直线的方向向量一定相同. ()
- (5) 若两条直线的斜率都不存在, 且两条直线不重合, 则这两条直线平行. ()

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 两条直线平行的判定

例1 判断下列各组直线是否平行, 并说明理由:

- (1) $l_1: y = 2x + 1, l_2: y = 2x - 1$;
- (2) $l_3: 2x - y - 7 = 0, l_4: x + 2y - 1 = 0$.

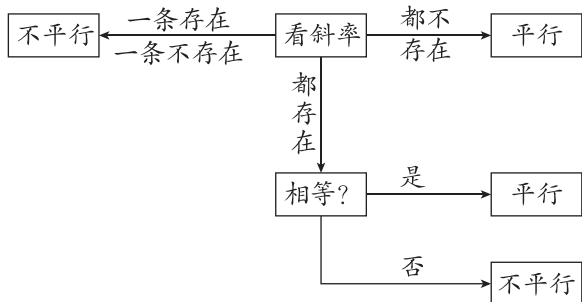
例2 根据下列给定的条件, 判断直线 l_1 与直线 l_2 是否平行.

- (1) l_1 经过点 $A(2,1), B(-3,5), l_2$ 经过点 $C(3, -3), D(8, -7)$;
- (2) l_1 经过点 $E(0,1), F(-2, -1), l_2$ 经过点 $G(3,4), H(2,3)$;
- (3) l_1 的倾斜角为 $60^\circ, l_2$ 经过点 $M(1, \sqrt{3}), N(-2, -2\sqrt{3})$;
- (4) l_1 平行于 y 轴, l_2 经过点 $P(0, -2), Q(0, 5)$.

变式 已知四边形 $ABCD$ 的四个顶点分别为 $A(3,7), B(4,6), C(1,-2), D(0,-1)$, 判断该四边形的形状.

[素养小结]

判断两条不重合的直线是否平行有两种方法:一是判断两直线的法向量或方向向量是否共线;二是利用斜率判定.利用斜率判定两条不重合的直线平行的方法如下:



拓展 若一束光线从点 $P(0,1)$ 出发,射到 x 轴上的 A 点后反射,反射光线过点 $Q(2,3)$,则点 A 的坐标为_____.

◆ 探究点二 已知平行求直线方程

例 3 已知直线 l 经过点 $M(2,1)$,且与直线 $m: 2x-y=0$ 平行,则 l 的方程为_____.

变式 过点 $P(1,2)$ 作直线 l ,若点 $A(2,3), B(4,-5)$ 到它的距离相等,则直线 l 的方程为 ()

- A. $4x+y-6=0$ 或 $x=1$
- B. $3x+2y-7=0$
- C. $4x+y-6=0$ 或 $3x+2y-7=0$
- D. $3x+2y-7=0$ 或 $x=1$

[素养小结]

求与已知直线平行的直线的方程时,常常有两种方法:
①由两平行直线(倾斜角不为 90°)的斜率相等,求出所求直线的斜率,再结合条件求解;②由两直线的法向量或方向向量共线来求解.

◆ 探究点三 已知两直线平行求参数

例 4 (1)已知直线 $l_1:(m+3)x+5y=5-3m, l_2: 2x+(m+6)y=8$,若 $l_1 \parallel l_2$,则 m 的值是_____.

(2)直线 l 经过点 $A(m,2), B(-1,m)$,若直线 l 与直线 $y=x+1$ 平行,则 $m=_____$.

变式 若直线 $ax+(1-b)y+5=0$ 和直线 $(1+a)x-y-b=0$ 同时平行于直线 $x-2y+3=0$,则 ()

- A. $a=\frac{1}{2}, b=0$
- B. $a=2, b=0$
- C. $a=-\frac{1}{2}, b=0$
- D. $a=-\frac{1}{2}, b=2$

[素养小结]

(1)当直线方程中存在字母参数时,不仅要考虑到斜率存在的一般情况,也要考虑到斜率不存在的特殊情况.同时还要注意 x, y 的系数不能同时为零这一隐含条件.

(2)在判断两直线平行时,可直接利用向量共线或直线方程的系数间的关系得出结论.

拓展 已知直线 $l_1: x+y\sin\alpha-1=0$ 和直线 $l_2: 2x\cdot\sin\alpha+y+1=0$,若 $l_1 \parallel l_2$,求 α 的值.

第2课时 两条直线垂直

【学习目标】

1. 理解两条直线垂直的条件.
2. 能根据斜率或方向向量、法向量判定两条直线垂直.
3. 能应用两条直线垂直解决相关问题.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点 两条直线垂直的判定

对于两条不重合的直线 $l_1: y = k_1x + b_1$ 和 $l_2: y = k_2x + b_2$, $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow$ _____.

特殊地,当 l_1, l_2 中有一条直线的斜率不存在时,说明斜率不存在的直线与 x 轴垂直,因此,若 $l_1 \perp l_2$,则另一条直线与 x 轴 _____,即另一条直线的斜率为 _____.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1)若两条直线中有一条直线的斜率不存在,另一条直线的斜率存在,则这两条直线垂直. ()
- (2)已知直线 l_1 的倾斜角为 α ,直线 l_2 的倾斜角为 β ,若 $l_1 \perp l_2$,则 $\alpha - \beta = 90^\circ$. ()
- (3)已知直线 l_1, l_2 的一个方向向量分别为 $\mathbf{a} = (1, k_1)$, $\mathbf{b} = (1, k_2)$,若 $l_1 \perp l_2$,则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$,从而 $k_1 k_2 = -1$. ()

课 中 探 究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 两条直线垂直的判定

例 1 (1)已知直线 $l: x - y + 3 = 0$,则下列直线中与 l 垂直的是 ()

- A. $2x + y = 0$ B. $5x - y + 3 = 0$
C. $x + y + 9 = 0$ D. $3x - y - 7 = 0$

(2)判断满足下列条件的直线 l_1 与 l_2 是否垂直.

- ① l_1 经过点 $A(-3, -4), B(1, 3)$, l_2 经过点 $M(-4, -3), N(3, 1)$;
- ② l_1 的斜率为 -10 , l_2 的一个方向向量为 $\mathbf{a} = (10, 1)$;
- ③ l_1 经过点 $C(1, 4), D(1, 1)$, l_2 经过点 $E(-1, 4), F(1, 4)$.

变式 解答下列各题:

- (1)已知点 $A(5, 3), B(10, 6), C(3, -4), D(-6, 11)$,求证: $AB \perp CD$;
- (2)已知直线 $l_1: 3x + 5y - 10 = 0, l_2: 15x - 9y + 8 = 0$,求证: $l_1 \perp l_2$.

[素养小结]

利用直线的斜率判定两直线垂直时,一般先由图形进行猜测,然后利用直线的斜率关系或方向向量、法向量来进行判断.在利用斜率进行判断时,一定要考虑直线的斜率是否存在.

◆ 探究点二 已知垂直求直线方程或参数

例 2 (1)过点 $P(1, -1)$ 且垂直于直线 $l: x - 2y + 1 = 0$ 的直线的方程为 ()

- A. $x + 2y + 1 = 0$
 B. $2x + y - 1 = 0$
 C. $x - 2y - 3 = 0$
 D. $2x - y + 3 = 0$

(2)[2024·福建厦门高二期中] 直线 $l_1: ax - 2y + 3 = 0$ 与直线 $l_2: x + (a - 1)y - 2 = 0$ 互相垂直, 则 $a =$ ()

- A. 0 B. 1
 C. 2 D. -1

变式 (1)已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(5, 5)$, AC 边上的高所在直线的方程为 $3x + 2y - 7 = 0$, 则 AC 边所在直线的方程为 ()

- A. $x - 2y + 5 = 0$
 B. $2x - 3y + 3 = 0$
 C. $x + 2y - 15 = 0$
 D. $2x - 3y + 5 = 0$

(2)已知点 $A(-2, 2), B(6, 4), H(5, 2)$, H 是 $\triangle ABC$ 的垂心, 则点 C 的坐标为 ()

- A. $(6, 2)$ B. $(-2, 2)$
 C. $(-4, -2)$ D. $(6, -2)$

[素养小结]

求与已知直线垂直的直线的方程时, 常常有两种方法:
 ①由两垂直直线(倾斜角不为 90°)的斜率之积为 -1 , 求出所求直线的斜率, 再结合条件求解; ②由两直线的法向量或方向向量垂直来求解.

◆ 探究点三 平行和垂直的综合问题

例 3 (1)已知 a, b 为正数, 且直线 $2x - (b - 3)y + 6 = 0$ 与直线 $bx + ay - 5 = 0$ 互相垂直, 则 $2a + 3b$ 的最小值为_____.

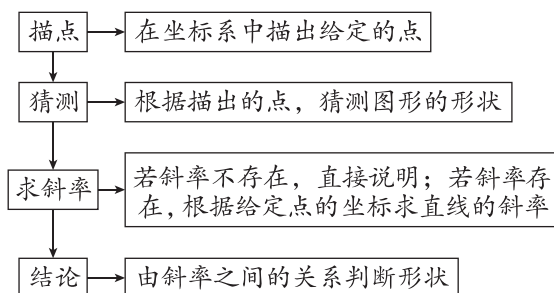
(2)已知 $A(-4, 3), B(2, 5), C(6, 3), D(-3, 0)$ 四点, 若顺次连接 A, B, C, D 四点, 试判定四边形 $ABCD$ 的形状.

变式 已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $A(0, 3), B(4, 1), C(5, 2)$, 且 E 为线段 CD 的中点.

(1)求线段 CD 的垂直平分线 l_1 的方程的一般式;
 (2)直线 l_2 经过点 D , 且 $BE \parallel l_2$, 求 l_2 在 y 轴上的截距.

[素养小结]

利用两条直线平行或垂直判定图形形状的步骤



1.5 两条直线的交点坐标

【学习目标】

能用解方程组的方法求两条直线的交点坐标.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点 两条直线的交点

1. 一般地,对于两条不重合的直线 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$, 我们可以用直线的斜率(斜率存在时)或法向量先定性判断两条直线是否相交,若相交,则依据直线方程的概念可知,两条直线 l_1, l_2 交点的坐标就是 _____, 因此,可通过求解方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \text{ 得到两条直线 } l_1, l_2 \text{ 的交点}$$

坐标.

2. 直线系方程

已知直线 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ 与 $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ 相交于点 P , 则过点 P 的直线(除 l_2 外)方程可写为 $A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0$.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)若两直线的方程组成的方程组有解,则两直线相交. ()

(2)若两直线相交,则交点坐标一定是两直线方程所组成的二元一次方程组的解. ()

(3)若直线 $2x + y + 1 = 0$ 与直线 $x - y - 4 = 0$ 的交点坐标为 (a, b) , 则 $a - b = 4$. ()

课 中 探 究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 两条直线的交点

例 1 分别判断下列直线是否相交,若相交,求出它们的交点坐标.

- $l_1: 2x - y = 7$ 和 $l_2: 3x + 2y - 7 = 0$;
- $l_1: 2x - 6y + 4 = 0$ 和 $l_2: 4x - 12y + 8 = 0$;
- $l_1: 4x + 2y + 4 = 0$ 和 $l_2: y = -2x + 3$.

变式 (1)若直线 $kx - k + y + 1 = 0$ 与直线 $x + 3y - 3 = 0$ 的交点在第一象限,则实数 k 的取值范围为 ()

A. $(-2, \frac{1}{2})$

B. $(-\frac{1}{2}, 0)$

C. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$

D. $(-\infty, -2) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$

(2)若三条直线 $2x + 3y + 8 = 0, x - y - 1 = 0, x + ky = 0$ 相交于一点,则 $k =$ _____.

[素养小结]

两条直线相交的判定方法

方法一:联立直线方程,解方程组,若有且仅有一组解,则两直线相交.

方法二:两直线的斜率都存在且斜率不相等.

方法三:两直线的斜率一个存在,另一个不存在.

拓展 (多选题)若直线 $l_1: 3x - y = 4, l_2: x + y = 0, l_3: 2x + 3my = 4$ 不能构成三角形,则 m 的取值可能为 ()

A. $\frac{2}{3}$

B. $-\frac{2}{3}$

C. $\frac{2}{9}$

D. $-\frac{2}{9}$

◆ 探究点二 求过两条直线交点的直线方程

例 2 (1) 求经过两直线 $l_1: 3x + 4y - 2 = 0$ 和 $l_2: 2x + y + 2 = 0$ 的交点且过坐标原点的直线 l 的方程.

(2) 求经过直线 $l_1: x - 2y + 4 = 0$ 和 $l_2: x + y - 2 = 0$ 的交点 P 且与直线 $l_3: 3x - 4y + 5 = 0$ 垂直的直线 l 的方程.

变式 1 [2024 · 新疆和田高二期中] 已知直线 $2x - y + 1 = 0$ 与直线 $3x + y + 9 = 0$ 相交于点 P .

(1) 求过点 P 且平行于直线 $5x - 4y - 1 = 0$ 的直线 l_1 的方程;

(2) 求过点 P 且垂直于直线 $3x + 4y - 3 = 0$ 的直线 l_2 的方程.

变式 2 已知在 $\triangle ABC$ 中, $A(-8, 2)$, AB 边上的中线 CE 所在直线的方程为 $x + 2y - 5 = 0$, AC 边上的中线 BD 所在直线的方程为 $2x - 5y + 8 = 0$, 求直线 BC 的方程.

[素养小结]

求过两直线交点的直线方程, 先解方程组求出两直线的交点坐标, 再结合其他条件写出直线方程, 也可借助直线系方程, 利用待定系数法求出直线方程. 常用的直线系方程如下: 与直线 $Ax + By + C = 0$ 平行的直线系方程是 $Ax + By + m = 0$ ($m \in \mathbf{R}$ 且 $m \neq C$); 与直线 $Ax + By + C = 0$ 垂直的直线系方程是 $Bx - Ay + m = 0$ ($m \in \mathbf{R}$); 若两直线 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ 有交点, 则过 l_1 与 l_2 交点的直线系方程为 $A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ (λ 为待定常数, 直线系方程中不包括直线 l_2 的方程).

◆ 探究点三 与交点有关的证明问题

例 3 已知 $A(-1, 2), B(2, 1), C(0, 4)$ 是 $\triangle ABC$ 的三个顶点, 求证: $\triangle ABC$ 的三条高所在直线相交于一点.

变式 已知直线 l 的方程为 $(a - 2)y = (3a - 1)x - 1$, 求证: 无论 a 为何值, 直线 l 总经过第一象限.

[素养小结]

证明平面几何中的三条直线交于一点的基本思路: 先求其中两条直线的交点坐标, 然后证明这一点在第三条直线上.